Лекція № 13

4.9. Постійне електромагнітне поле

Поле, напруженості якого не змінюються з часом, тобто є тільки функціями від просторових змінних $\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})$, називається постійним електромагнітним полем. Векторний $\vec{A}$ та скалярний φ потенціали при цьому можуть залежати й від часової змінної, однак їх можна завжди обрати так, щоб вони були тільки функціями координат $\vec{A}(\vec{r}), \varphi(\vec{r})$, завдяки наявності градієнтної інваріантності (див. (4.22)). Згадаємо загальні формули зв'язку між напруженостями та потенціалами (ф-ли (4.10), (4.11)):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi;$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Згадаємо про градієнтну інваріантність (див. (4.22)).

$$\vec{A}' \to \vec{A} + \nabla f;$$

$$\varphi' \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Шукаємо такі потенціали, для яких

$$\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \nabla f\right) = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0; \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0; \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0; \end{cases}$$

Напруженість постійного електричного поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\underbrace{\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}}_{=0} - \nabla\varphi' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\left(\varphi' + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) =$$

$$= \nabla\varphi' - \frac{1}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\frac{\partial f}{\partial t}\right)}_{=0};$$

$$\vec{E} = -\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right);$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Калібрувальну функцію, яка забезпечить відсутність залежності від часу векторного та скалярного потенціалів можна знайти з рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Коли $\vec{A}(\vec{r}), \varphi(\vec{r})$, матимемо (штрихи не пишемо)

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \tag{4.52}$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}. \tag{4.53}$$

Напруженість $\vec{E}(\vec{r})$ постійного електричного поля визначається тільки через скалярний потенціал $\varphi(\vec{r})$, а напруженість постійного магнітного поля $\vec{H}(\vec{r})$ – через векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r})$. Згідно з (4.52) до скалярного потенціалу $\varphi(\vec{r})$, який залежить тільки від координат, можна додати тільки константу. Векторний потенціал і в цьому випадку є неоднозначним, бо до нього можна додати довільну функцію координат $\tilde{f}(\vec{r})$.

Скалярний потенціал $\varphi(\vec{r})$ можна вважати однозначним, бо зазвичай на $\varphi(\vec{r})$ накладають ще додаткову умову, щоб він мав певне значення в певній точці простору. Як правило, це умова $\psi(x, y, z) \to 0$, якщо $|\vec{r}| \to \infty$. Ця умова дозволяє знайти необхідну константу.

Для постійного поля функція Лагранжа не залежить явно від часу (час є циклічною координатою). Зберігається енергія

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} + e\varphi \tag{4.54}$$

Тут $e\varphi$ – потенціальна енергія електричного заряду в полі. Енергія заряду в полі залежить тільки від скалярного потенціалу, тобто від напруженості тільки електричного поля $\vec{E}$. Магнітне поле не входить до (4.54), роботи не виконує та енергію заряду не змінює.

Постійне однорідне електричне поле $\vec{E} = const$ – поле постійної напруженості. Потенціал постійного однорідного поля має такий вигляд

$$\varphi(\vec{r}) = -(\vec{E}, \vec{r}), \quad \vec{E} = const. \tag{4.55}$$

Векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r})$ постійного однорідного магнітного поля – поле постійної напруженості $\vec{H} = const$ – можна побудувати кількома способами.

1. Постійне однорідне магнітне поле довільного напрямку:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H}, \vec{r}\right]. \tag{4.56}$$

Напруженість з (4.56) отримаємо так

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\nabla, \left[\vec{H}, \vec{r}\right]\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{H}\left(\nabla, \vec{r}\right) - \left(\vec{H}, \nabla\right)\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\left(3\vec{H} - \vec{H}\right) = \vec{H}.$$

2. Постійне однорідне магнітне поле, яке направлено уздовж осі z:

$$\vec{A} = (-Hy, 0, 0). \tag{4.57}$$

Напруженість з (4.57) отримаємо так

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -Hy & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial y}(Hy) = H\vec{e}_z.$$

Замість (4.57) можна написати

$$\vec{A} = (0, Hx, 0). \tag{4.58}$$

Знов отримаємо

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Hx & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x}(Hx) = H\vec{e}_z. \tag{4.59}$$

Векторний потенціал постійного однорідного поля у вигляді (4.58) називають калібруванням Ландау. Ландау запропонував такий вигляд для опису руху електрону в магнітному полі в квантовій механіці й отримав так звані «рівні Ландау».

Розглянемо декілька важливих задач про рух релятивістського заряду у постійному однорідному електромагнітному полі:

Рух в постійному однорідному електричному полі.

Рух в постійному однорідному магнітному полі.

Рух в паралельних полях.

Релятивістський рух в перехрещених полях, в принципі, можна за допомогою відповідного вибору ІСВ, до перелічених вище випадків. Наприклад, рух в перпендикулярних різних по величині полях можна відповідним вибором ІСВ звести до руху або в електричному, або магнітному полі. Рух в полях, кут між якими гострий, можна звести до руху в паралельних полях. Є ще варіант руху в однакових по величині перпендикулярних полях. Його пропонується вивчити самостійно.

Рух в перехрещених полях розглянемо тільки у для нерелятивістському випадку.

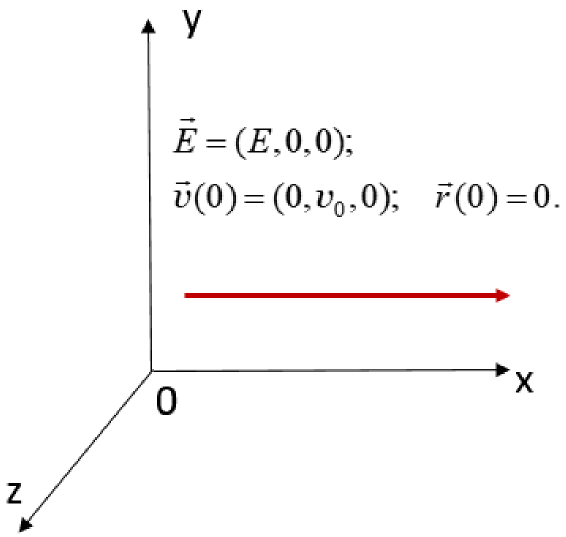
4.9.1. Рух релятивістського заряду в постійному однорідному електричному полі

Рівняння руху заряду в полі (див. ф-лу (4.15)) для випадку $\vec{E} = const, \vec{H} = 0$ запишеться так

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}. \tag{4.60}$$

Виберемо напрямок електричного поля уздовж осі x $\vec{E} = (E, 0, 0)$ та використаємо таки початкові умови

$$\vec{r}(0) = 0,\ \vec{p}(0) = (0, p_0, 0). \tag{4.61}$$



Рівняння (4.60) в проекціях приймає такий вигляд

$$\frac{dp_x}{dt} = eE; \quad \frac{dp_y}{dt} = 0; \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \tag{4.62}$$

Перші інтеграли з урахуванням початкових умов(4.61)

$$p_x(t) = eEt; \quad p_y(t) = p_0; \quad p_z(t) = 0;$$

Проекція імпульсу на напрямок поля зростає лінійно з часом, а в напрямку, перпендикулярному полю, імпульс не змінюється. Згідно з обраними початковими умовами z-проекція дорівнює 0. Рух відбувається у площині x0y.

Енергія $\varepsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ («кінетична») змінюється з часом за законом:

$$\varepsilon = \sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4} = \sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}. \tag{4.63}$$

$\varepsilon_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4}$ – початкове значення енергії.

Згадаємо зв'язок між імпульсом, швидкістю та енергією

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}; \quad \vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon}.$$

Компоненти швидкості змінюються так

$$\begin{aligned}
&\upsilon_x(t) = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}};\\
&\upsilon_y(t) = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}};\\
&\upsilon_z(t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Порівняємо формулу (2.15) для зміни швидкості при рівноприскореному руху частинки уздовж осі x

$$\upsilon_x(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}}.$$

з формулою (4.64) для $\upsilon_x(t)$:

$$\upsilon_x(t) = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{\left(\frac{c^2 eE}{\varepsilon_0}\right)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2}}.$$

Очевидно, що рух заряду в постійному однорідному електричному полі є прикладом рівноприскореного руху із прискоренням у власній системі відліку (системі, яка рухається разом із зарядом)

$$\vec{a} = \frac{c^2 e\vec{E}}{\varepsilon_0}. \tag{4.65}$$

Перевіримо нерелятивістську границю для формул (4.64), Нерелятивістському рух відповідає нерівність $p_0 c, eEt \ll mc^2$.

$$\begin{aligned}
&\upsilon_x(t) = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\underbrace{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2}_{\ll m^2 c^4} + m^2 c^4}} \approx \frac{c^2 eEt}{\sqrt{m^2 c^4}} = \frac{eE}{m} t;\\
&\upsilon_y(t) = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\underbrace{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2}_{\ll m^2 c^4} + m^2 c^4}} \approx \frac{c^2 p_0}{\sqrt{m^2 c^4}} = \frac{p_0}{m};\\
&\upsilon_z(t) = 0.
\end{aligned}$$

Отримали відомі формули для рівноприскореного руху із прискоренням $a = \frac{eE}{m}$.

Ультрарелятивістський випадок: $p_0 c, eEt \gg mc^2$.

$$\upsilon_x(t) = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4}} \approx \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2}};$$
$$\upsilon_y(t) = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2 + m^2 c^4}} \approx \frac{c^2 p_0}{\sqrt{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2}};$$

Повна швидкість наближається до швидкості світла. Навіть у слабкому полі з часом рух стає релятивістським та ультрарелятивістським.

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \approx \frac{(c^2 eEt)^2 + (c^2 p_0)^2}{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2} = c^2 \frac{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2}{(ceEt)^2 + c^2 p_0^2} = c^2;$$
$$\upsilon \to c.$$

Детальніше: $\upsilon_x \to c, \upsilon_y \to 0.$

Електрон був відкритий в 1897 році – це катодні промені. Ще тоді з’ясувалося, що рух пучку електронів в електричному та магнітному полях трохи відрізнявся від передбачень рівнянь Ньютона для класичного імпульсу Це стосується траєкторій руху як в електричному, так і магнітному полях так і швидкості обертання в магнітному полі. Релятивістські рівняння дають точний опис.

Шукаємо тепер закон руху

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}};$$
$$\upsilon_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{(ceEt)^2 + \varepsilon_0^2}};$$
$$\upsilon_z(t) = \frac{dz}{dt} = 0.$$

$$x(t)=\int\frac{c^2eEt}{\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}}dt=\frac{1}{eE}\int\frac{ceEt}{\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}}d(ceEt)=$$

$$=\frac{1}{eE}\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}+const;\quad x(0)=0;\quad const=\frac{1}{eE}\varepsilon_0;$$

$$x(t)=\frac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\right];$$

$$y(t)=\int\frac{c^2p_0}{\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}}dt=\frac{cp_0}{eE}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(\frac{\varepsilon_0}{ceE}\right)^2}}=$$

$$=\frac{cp_0}{eE}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)+const;\quad y(0)=0;\quad const=0;$$

$$y(t)=\frac{cp_0}{eE}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right);$$

Закон руху релятивістського заряду в постійному однорідному електричному полі

$$x(t)=\frac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\right];$$
$$y(t)=\frac{cp_0}{eE}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right).\tag{4.66}$$

Нерелятивістська границя:

$$x(t)=\frac{1}{eE}\left[\sqrt{(ceEt)^2+\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\right]=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\sqrt{1+\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2}-1\right]\approx$$

$$\approx\frac{mc^2}{eE}\left[\sqrt{1+\left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}-1\right]\approx\frac{mc^2}{eE}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{eEt}{mc}\right)^2-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)t^2.$$

$$y(t)=\frac{cp_0}{eE}\mathrm{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)\approx\frac{cp_0}{eE}\left(\frac{ceEt}{mc^2}\right)=\frac{p_0}{m}t.$$

Ультрарелятивістська границя – рівномірний рух зі швидкістю світла.

Знайдемо траєкторію руху. Виключимо час з формул для закону руху (4.66)

$$x(t)=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\sqrt{\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right)^2+1}-1\right];$$

$$y(t)=\frac{cp_0}{eE}\operatorname{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right);\quad \frac{eEy}{cp_0}=\operatorname{Arcsh}\left(\frac{ceEt}{\varepsilon_0}\right);$$

$$\frac{ceEt}{\varepsilon_0}=\operatorname{sh}\left(\frac{eEy}{cp_0}\right);\quad x=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\sqrt{\operatorname{sh}^2\left(\frac{eEy}{cp_0}\right)+1}-1\right]=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{eEy}{cp_0}\right)-1\right];$$

Траєкторія руху релятивістського заряду в постійному однорідному електричному полі – ланцюгова лінія:

$$x=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{eEy}{cp_0}\right)-1\right]. \tag{4.67}$$

В нерелятивістському граничному випадку отримаємо звичайну траєкторію для рівноприскореного руху – параболу:

$$x\approx\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{eEy}{cp_0}\right)^2-\cancel{1}\right]=\frac{\varepsilon_0 eEy^2}{2c^2p_0^2}\approx\frac{\cancel{m}\,\cancel{c^2}\,eEy^2}{2\,\cancel{c^2}\,m^{\cancel{2}}\upsilon_0^2}=\frac{eE}{2m\upsilon_0^2}y^2.$$

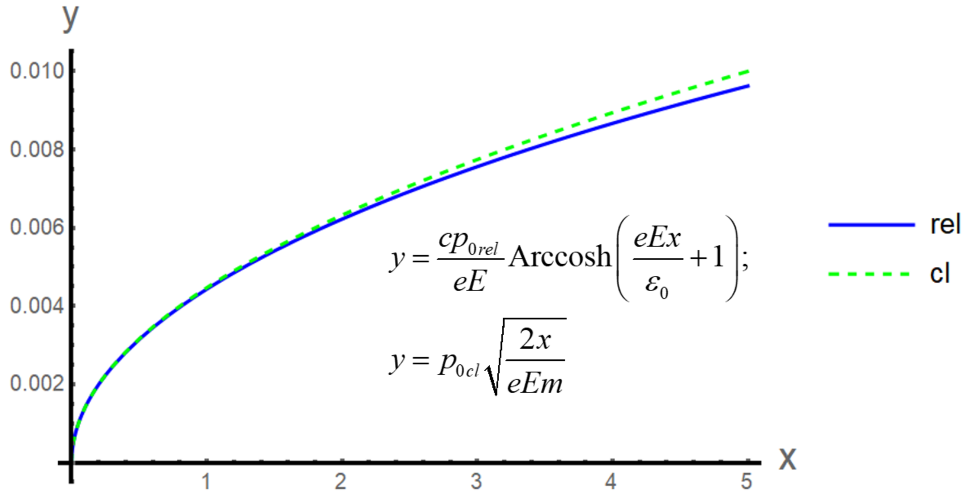
В ультрарелятивістському випадку можна в (4.67) гіперболічний косинус замінити на експоненту

$$x=\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\frac{1}{2}\left(\exp\left(+\frac{eEy}{cp_0}\right)+\exp\left(-\frac{eEy}{cp_0}\right)\right)-1\right]\approx$$

$$\approx\frac{\varepsilon_0}{eE}\left[\frac{1}{2}\left(\exp\left(+\frac{eEy}{cp_0}\right)+\cancel{\exp\left(-\frac{eEy}{cp_0}\right)}\right)\cancel{-1}\right]\approx$$

$$\approx\frac{\varepsilon_0}{2eE}\exp\left(+\frac{eEy}{cp_0}\right);\quad y\ge 0.$$

Релятивістська та класична траєкторії руху



Значення координат та всі інші величини -
в «довільних одиницях»

```
c = 1;
v0 = .001;
e = 1;
m = 1;
Ef = .1;
tmax = 10;
```

Моделювання руху по траєкторії